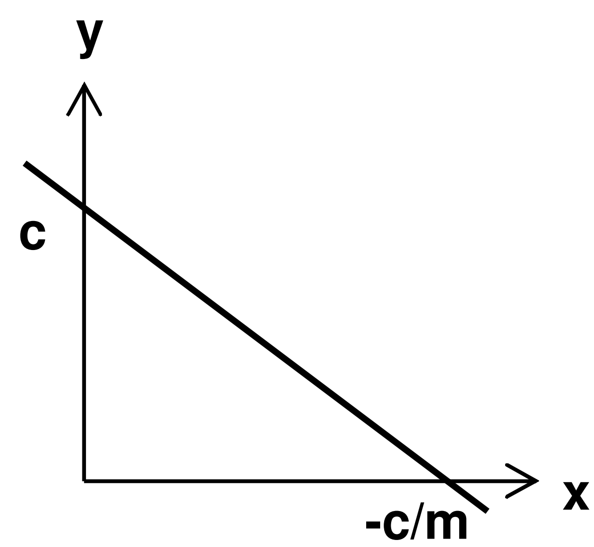
Die Gerade im kartesischen Koordinatensystem

Im kartesischen Koordinatensystem wird eine Gerade durch ihre Steigung ***m*** und den ***y***-Achsenabschnitt ***c*** beschrieben.

$$\boxed{y = m \cdot x + c}$$



Beispiel:

Die Schnittpunkte der Gerade mit der y- und der x-Achse haben die Werte:

$c = 2$, $-c/m = 4$

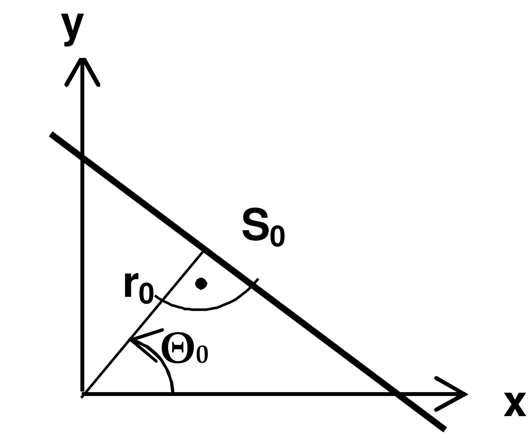
Daraus folgt $-2/m = 4 \rightarrow m = -1/2$

Eingesetzt in die allgemeine Form $y = mx + c$ ergibt sich folgende Geradengleichung:

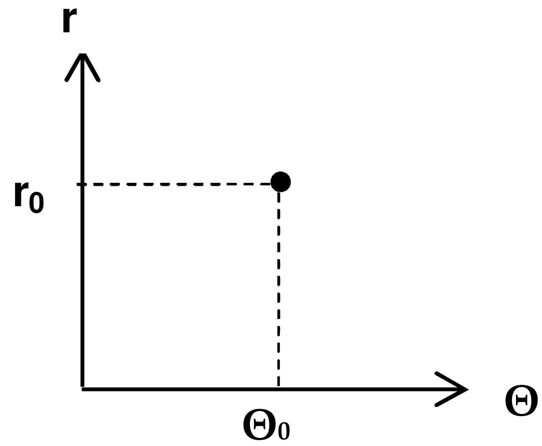
$y = -1/2x + 2$

Die Gerade im (r, Θ)-Raum

Eine Gerade kann auch durch den Abstand ***r*** und den Winkel ***Θ*** (Theta) beschrieben werden.

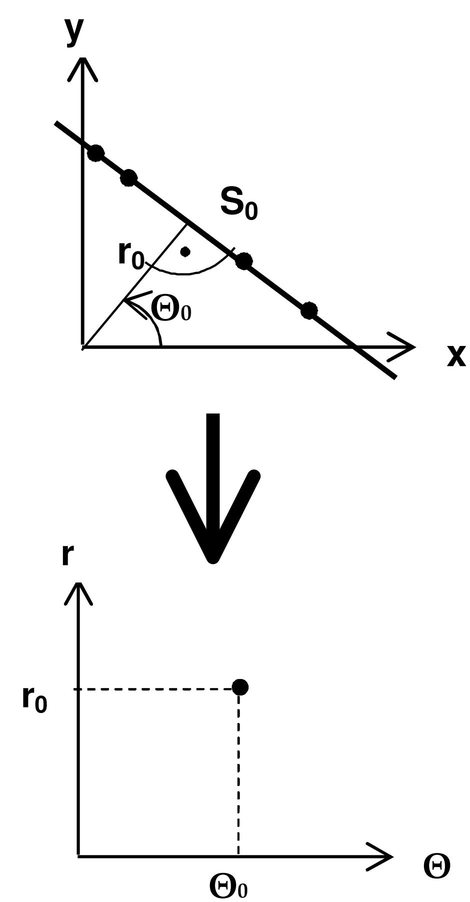


Die Gerade $\boldsymbol{S_0}$ kann also als ein Punkt ($\boldsymbol{r_0}$, $\boldsymbol{\Theta_0}$) im (***r***, ***Θ***) Raum charakterisiert werden.



Die Hesse‘sche Normalform

Jeder Punkt auf einer Geraden $\boldsymbol{S_0}$ wird auf den Punkt ($\boldsymbol{r_0}$, $\boldsymbol{\Theta_0}$) im ($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\Theta}$) Raum abgebildet.



Dies lässt sich durch die Hesse‘sche Normalform ausdrücken:

$$\boxed{x \cdot \cos(\Theta) + y \cdot \sin(\Theta) - r = 0}$$

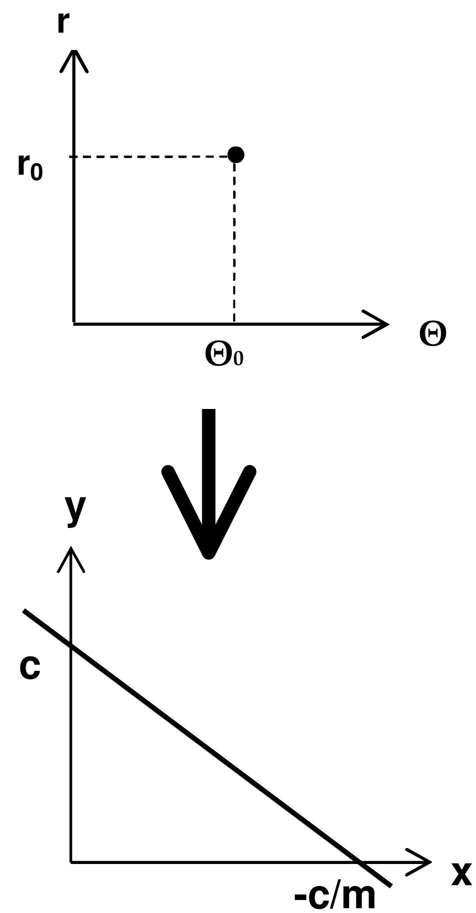
Wenn also der Winkel $\boldsymbol{\Theta}$ und ein Punkt x_1,y_1 auf der Geraden bekannt sind, wird der Abstand $\boldsymbol{r}$ der Geraden zum Ursprung, auf welchem sich der Punkt befindet wie folgt berechnet:

$$\boxed{r = x_1 \cdot \cos(\Theta) + y_1 \cdot \sin(\Theta)}$$

Die Punkt–zu–Gerade Transformation

Ein Punkt im (***r***, ***Θ***) Raum kann wieder in die Standardform $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{c}$ zurücktransformiert werden:

$$m = -\frac{1}{\tan(\Theta)} \qquad c = \frac{r}{\sin(\Theta)} \qquad \Theta \neq 0$$

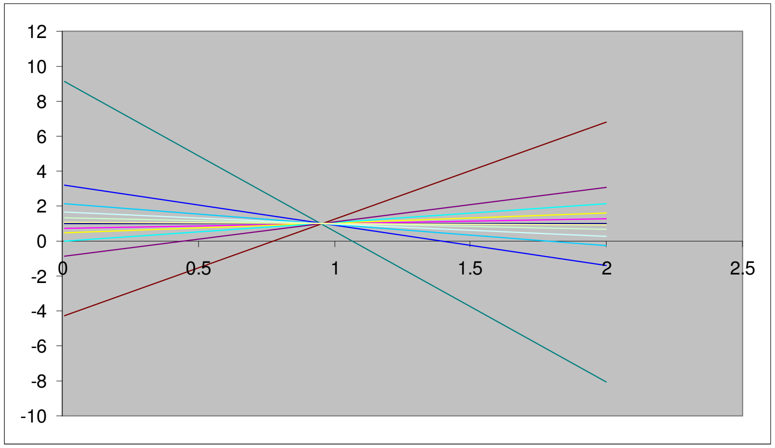


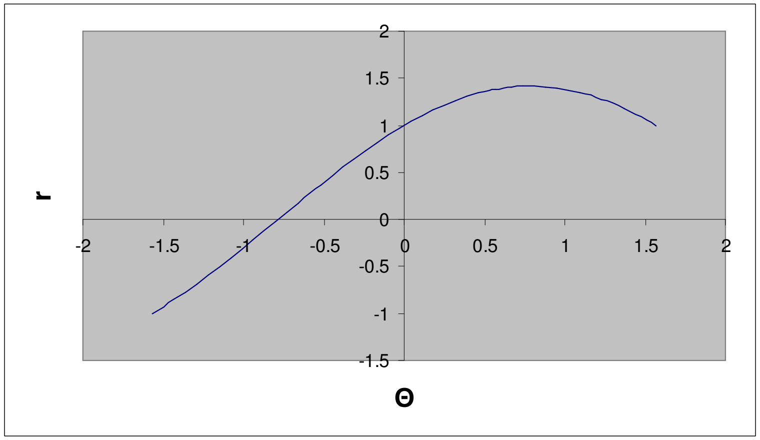
Aus der obigen Formel wird klar, dass eine Gerade, die parallel zur ***y***-Achse läuft, mit der Standardform nicht darstellbar ist.

Daraus folgt:
Geraden, die parallel zur ***y***-Achse laufen, können nur mit der Hesse'schen Normalform beschrieben werden.

Die Hough-Transformation

Wenn man durch einen festen Punkt x_1 , y_1 ein Geradenbüschel legt, indem man alle Winkel Θ zwischen 0 und π betrachtet, so erhält man im r, Θ-Raum eine sinusförmige Kurve.



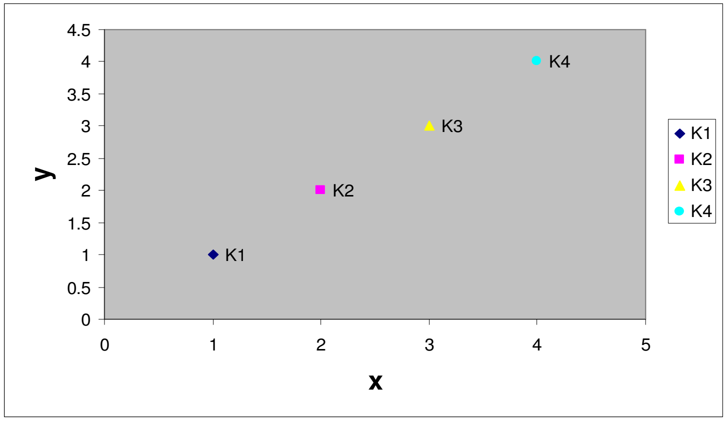


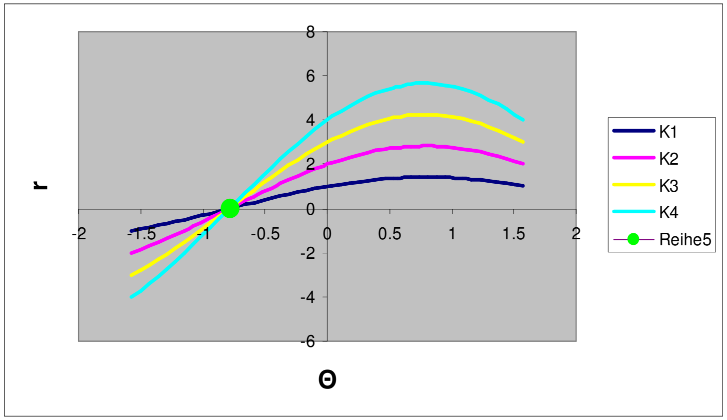
Es gilt ja $r = x_1 \cdot cos(\Theta) + y_1 \cdot sin(\Theta) = A \cdot sin(\Theta + \Theta_0)$

mit $A = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, wobei Θ_0 die Phasenverschiebung angibt.

Die Hough-Transformation

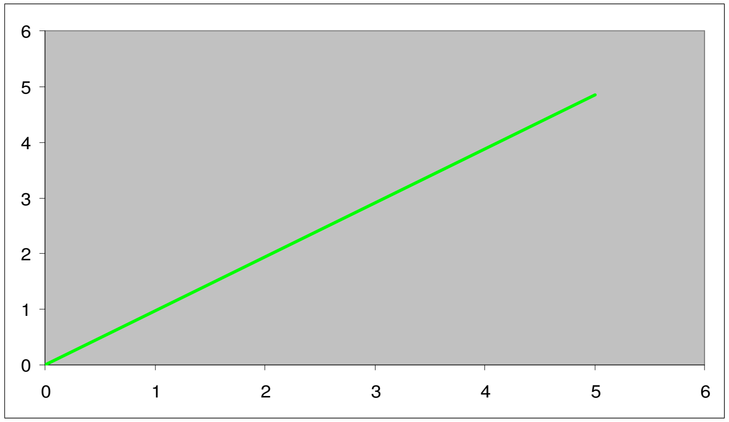
Wenn man dies nun mit mehreren Punkten x_i, y_i durchführt, schneiden sich die Kurven dort wo gemeinsame Geraden vorhanden sind.





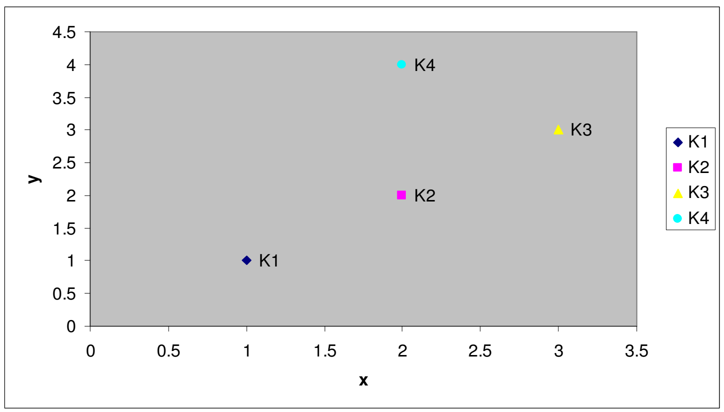
Durch Zurücktransformation des Schnittpunktes erhält man:

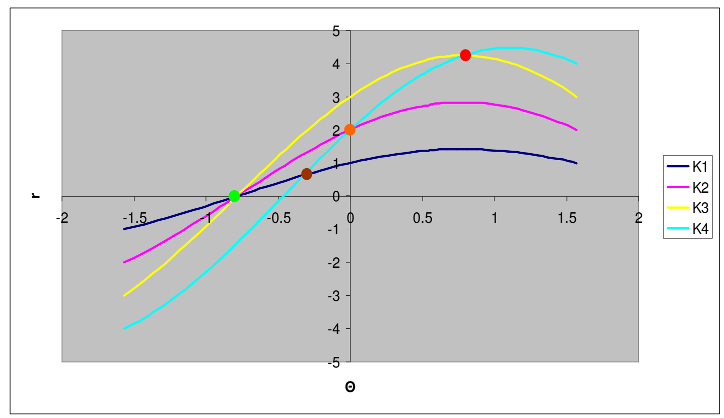
$y = mx + c$ *(hier m = 1,c = 0)*



Die Hough-Transformation

Sind die Punkte nicht auf einer Linie, so ergeben sich entsprechend mehr Schnittpunkte.





Durch Zurücktransformation der Schnittpunkte erhält man:

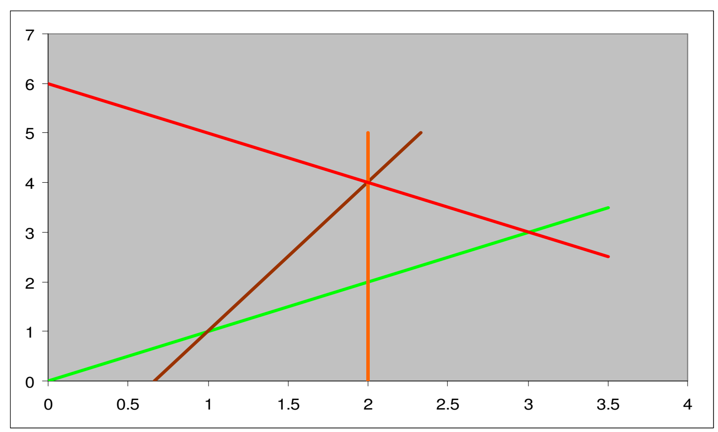
$y = x$

$y = 3x - 2$

$y = 6 - x$

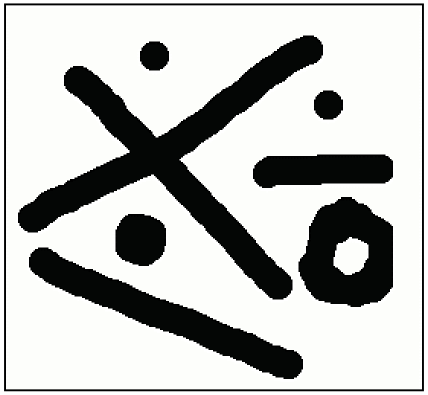
$r = 2$, $\Theta = 0 \rightarrow x = 2$

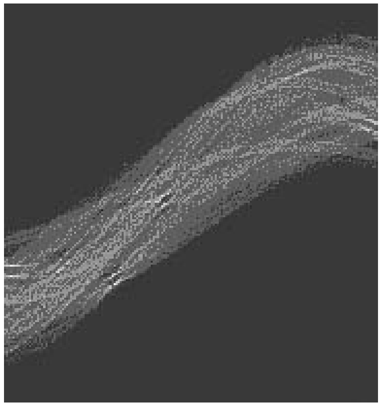
(Hesse'sche Normalform)

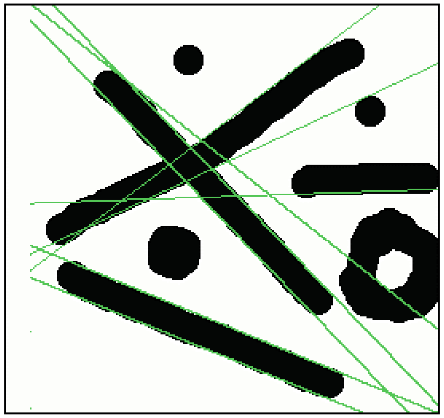


Der Hough-Algorithmus

- Der (***r***, ***Θ***) Raum wird als Matrix, dem sogenannten Akkumulatorraum, dargestellt.
- Alle Zellen werden mit 0 initialisiert.
- Für jeden Bildpunkt durchläuft man den gesamten quantisierten Wertebereich von ***Θ*** und erhöht für jeden berechneten Punkt im (***r***, ***Θ***) Raum die entsprechende Zelle.
- Die Zellen mit den höchsten Werten werden wieder in Geraden zurücktransformiert







Anwendungen

- **Erkennung von Geraden**
  Durch die Beziehungen der Geraden zueinander können Objekte erkannt werden oder sich Hinweise auf interessante Regionen ergeben.
- **Durch Erweiterung auf den dreidimensionalen r,Θ-Raum können zum Beispiel auch Kreise und Ellipsen erkannt werden.**
- **Nachzeichnen von unterbrochenen Linien**
  Die Endpunkte der Linien müssen durch sogenanntes Tracking ermittelt werden.
  Es werden zum Beispiel nur diejenigen Abschnitte der Geraden beibehalten, in denen auch im Originalbild genügend viele Bildpunkte gesetzt sind.

Nachteile

- **Aufwendig**
  Da relativ viel Rechenzeit benötigt wird, eignet sich das gesamte Verfahren nur beim Vorhandensein weniger Geraden.
- **Störanfällig**
  Ist die Quantisierung des Akkumulators zu fein, ist das Verfahren störanfällig, weil nicht mehr eindeutige Maximalwerte ermittelt werden können (zu viele Geraden).
  Eine zu grobe Quantisierung des Akkumulators führt dazu, dass ähnliche Geraden zusammenfallen.